OLASILIK

• **Örnek uzay:** Bir deneyde elde edilebilecek tüm sonuçların kümesine denir ve E ile gösterilir.

İki madeni para atıldığında:

{ (Y,T), (T,Y), (Y,Y), (T,T) }

☺ n tane para atıldığında örnek uzay: 2^n

n tane zar atıldığında örnek uzay: 6^n

2 tane zar havaya atıldığında $6^2 = 36$ tane durum olur.

Ayrık olaylar ve olasılık fonksiyonu:

$A \in E$, $B \in E$ ve $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B olaylarına ayrık olaylar denir.

$P(A) + P(A') = 1$

$0 \leq P(A) \leq 1$

0 → imkansız olay, 1 → kesin olay

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

☺ A ve B ayrık olaylar ise $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dır.

P(A) = Bir olayın olma olasılığı

s(A) = İstenilen durum

s(E) = Tüm durum

olmak koşuluyla

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)}$$

1) $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ ve $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ olduğuna göre $P(A \cup B)$ nedir?

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$
(4) (2)

2) Bir deney için a, b, c gibi üç ayrık sonuç mümkündür. Sonucun a ya da b olma olasılığı $\frac{2}{3}$, b ya da c olma olasılığı $\frac{5}{6}$ olduğuna göre a, b, c sonuçlarına ait olasılıklar sırası ile nedir?

$P(a) + P(b) = \frac{2}{3}$

$P(b) + P(c) = \frac{5}{6}$

$\underbrace{P(a)+P(b)}_{\frac{2}{3}}+P(c) = 1 \Rightarrow P(c) = \frac{1}{3}$

$P(a)+\underbrace{P(b)+P(c)}_{\frac{5}{6}} = 1 \Rightarrow P(a) = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{6} + P(b) + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow P(b) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}$

$= \frac{6}{6} - \frac{1}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\left\{ \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\}$

3) Üç kişilik bir yarışmada A nın yarışı kazanma olasılığı B nin 2 katı, B nin yarışı kazanma olasılığı C nin 3 katıdır. Buna göre A nın yarışı kazanma olasılığı nedir?

$P(B) = 3 \cdot P(C)$ ve $P(A) = 2 \cdot P(B)$

⇓ 3p ⇓ p ⇓ 6p ⇓ 3p

$P(A) + P(B) + P(C) = 1$

$10p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{10}$ $P(A) = 6p = \frac{6}{10}$

4) Bir zar atıldığında üst yüze gelen sayının

a) Asal sayı olma olasılığı nedir?

$\{2,3,5\} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b) En az 2 gelme olasılığı nedir?

$\{2,3,4,5,6\} \Rightarrow \frac{5}{6}$

c) Çift sayı olma olasılığı nedir?

$\{2,4,6\} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

5) İki zarın birlikte atılması deneyinde

a) Üst yüze gelen sayıların toplamının 6 olma olasılığı nedir?

$\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$ $\frac{5}{36}$

b) Üst yüze gelen sayıların aynı olma olasılığı nedir?

$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

c) Üst yüze gelen sayıların ikisininde tek sayı olma olasılığı nedir?

$(1,1),(1,3),(1,5)$
$(3,1),(3,3),(3,5) \Rightarrow \frac{9}{36}=\frac{1}{4}$
$(5,1),(5,3),(5,5)$

d) Üst yüze gelen sayıların çarpımının 6 olma olasılığı nedir?

$(1,6),(2,3),(3,2),(6,1) \Rightarrow \frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

6) Bir torbada 3 beyaz, 5 siyah top vardır. Torbadan rastgele üç top çekiliyor. Çekilen üç toptan ikisinin siyah, birinin beyaz olma olasılığı nedir?

$$\frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{10.3}{56}=\frac{30}{56}=\frac{15}{28}$$

7) Bir torbada 4 kırmızı, 6 beyaz top vardır. Torbadan rastgele iki bilye çekiliyor. Çekilen bilyelerin

a) Birinin kırmızı, birinin beyaz olma olasılığı nedir?

$$\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$$

b) Çekilen bilyelerin ikisininde kırmızı olma olasılığı nedir?

$$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$$

c) Çekilen bilyelerin aynı renkte olma olasılığı nedir?

$$\frac{\binom{4}{2}+\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{6+15}{45}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}$$

8) 5 kız, 4 erkekten oluşan bir öğrenci topluluğundan rastgele 3 öğrenci seçiliyor. En az ikisinin kız olma olasılığı nedir?

$$\frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{1}+\binom{5}{3}\cdot\binom{4}{0}}{\binom{9}{3}}=\frac{40+10}{84}=\frac{50}{84}=\frac{25}{42}$$

9) 4 matematik öğretmeni ve 3 geometri öğretmeni arasından 3 kişilik bir kurul oluşturulacaktır.

Kurulda en az bir geometri öğretmeni olma olasılığı nedir?

$$\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{2}+\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{1}+\binom{3}{3}\cdot\binom{4}{0}}{\binom{7}{3}}=\frac{18+12+1}{35}$$

$$=\frac{31}{35}$$

10) Bir odada altı evli çift vardır. Bu odadan rastgele iki kişi seçildiğinde bu iki kişinin karı koca olma olasılığı nedir?

$$\frac{\binom{6}{1}}{\binom{12}{2}}=\frac{6}{66}=\frac{1}{11}$$

11) $A=\{1,2,3,4,5\}$ kümesinin alt kümeleri birer karta yazılıp bir kutuya konuluyor. Kutudan bir kart çekiliyor, bu kartta yazılı 4 elemanlı bir küme olma olasılığı nedir?

$$\frac{\binom{5}{4}}{2^5}=\frac{5}{32}$$

12) Birbirinden farklı 5 matematik, 4 kimya ve 2 geometri kitabı bir rafa yanyana diziliyor. Matematik kitaplarının yanyana olma olasılığı nedir?

(5m) 4K 2G
1

$$\frac{7!.5!}{11!}=\frac{1}{66}$$

13) 

Şekildeki 6 nokta ile çizilebilen çokgenlerden rastgele seçilen birinin beşgen olma olasılığı nedir?

$$\frac{\binom{6}{5}}{\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}}=\frac{6}{20+15+6+1}=\frac{6}{42}=\frac{1}{7}$$

14) $A=\{-2,-1,0,1\}$
$B=\{-1,0,1,2,3,4\}$ kümeleri veriliyor.
AxB kartezyen çarpımından alınan bir elemanın (a,a) biçiminde olma olasılığı nedir?

$s(AxB)=s(A).s(B)=24$

$(-1,-1),(0,0),(1,1)$ } 3 tanedir.

$$\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

15) Düzgün bir para 3 defa atıldığında en az bir tura gelme olasılığı nedir?

$$\frac{\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}}{2^3}=\frac{3+3+1}{8}=\frac{7}{8}$$

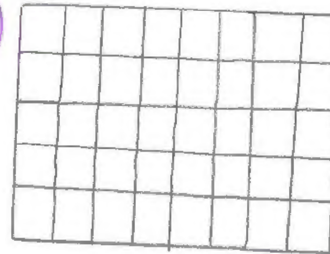
16) Bir madeni para ard arda 6 defa atıldığında atışlardan 4 ünün yazı, 2 sinin tura gelme olasılığı nedir?

$$\frac{\binom{6}{4}}{2^6}=\frac{15}{64}$$

17) 5 pozitif, 3 negatif sayıdan rastgele seçilen 3 sayının çarpımının negatif olma olasılığı nedir?

− − − ✓
− − +
− + + ✓
+ + +

$$\frac{\binom{5}{0}\cdot\binom{3}{3}+\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{1+30}{56}=\frac{31}{56}$$

18) 

Yandaki şekil eş karelerden oluşmuştur.

Buna göre seçilen herhangi bir dikdörtgenin kare olma olasılığı nedir?

Dikdörtgen sayısı: $\binom{9}{2}\cdot\binom{6}{2}=36.15$
$=540$

Kenarı 1 br ⇒ 8.5 = 40
Kenarı 2 br ⇒ 7.4 = 28
Kenarı 3 br ⇒ 6.3 = 18
Kenarı 4 br ⇒ 5.2 = 10
Kenarı 5 br ⇒ 4.1 = 4
} Toplam 100 kare vardır.

$$\frac{100}{540}=\frac{5}{27}$$

19) Düzgün bir para 3 defa atıldığında, en çok bir tura gelme olasılığı nedir?

$$\frac{\binom{3}{0}+\binom{3}{1}}{2^3}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

20) Bir madeni para ard arda 5 defa atıldığında atışlardan 3 ünün yazı, 2 sinin tura gelme olasılığı nedir?

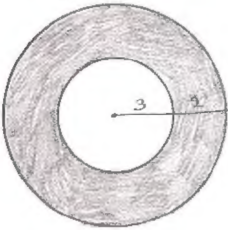
$$\frac{\binom{5}{3}}{2^5}=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$$

21) $(2x-y)^{10}$ açılımındaki terimlerin katsayılarından biri rastgele seçiliyor. Seçilen katsayının negatif olma olasılığı nedir?

$+, -, +, -, +, -, +, -, +, -, +$

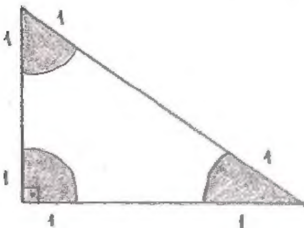
$$\frac{5}{11}$$

22) Yarıçapı 5 cm olan bir dairenin içinden seçilen bir noktanın merkeze olan uzaklığının en az 3 cm olma olasılığı nedir?



$$\frac{25\pi-9\pi}{25\pi}=\frac{16\pi}{25\pi}=\frac{16}{25}$$

23) Dik kenarları 4 cm ve 8 cm olan bir dik üçgen içerisinden rastgele seçilen bir noktanın köşelere olan uzaklığının 1 cm den küçük olma olasılığı nedir?

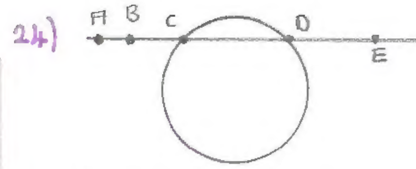


Tüm alan : $\frac{4.8}{2}=16$

Taralı alan = Yarım daire $=\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\pi}{2}}{16}=\frac{\pi}{32}$$

24)



Yukarıda verilen noktalardan seçilecek olan herhangi iki noktadan yalnız birinin çembere ait olma olasılığı nedir?

$$\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

25) 4 evli çift arasından rastgele 3 kişi seçilecektir. Seçilen 3 kişinin içinde herhangi bir evli çiftin olması olasılığı nedir?

$$\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$$

• Koşullu olasılık :

A olayının olasılığı, B olayının gerçekleşmiş olmasına bağlı ise buna koşullu olasılık denir.

A olayının B koşullu olasılığı $P(A\backslash B)$ şeklinde ifade edilirse

$$P(A\backslash B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

26) Bir çift zarın atılması deneyinde zarlardaki sayılar toplamının 6 olduğu bilindiğine göre sayıların ikisininde çift sayı olma olasılığı nedir?

$\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$

$$=\frac{2}{5}$$

27) $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinin alt kümeleri birer karta yazılıp, bir kutuya konuluyor. Bu kutudan rastgele bir kart çekiliyor. Çekilen karttaki kümenin 4 elemanlı bir küme olduğu bilindiğine göre bu kümede 2 nin bulunma olasılığı nedir?

Tüm durum : $\binom{6}{4}=15$

İstenilen durum : $\underline{2}\ _\ _\ _ \Big\}\ \binom{5}{3}=10$

$\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$

• **Bağımlı ve bağımsız olaylar :**

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

28) Bir zar ile bir madeni para birlikte havaya atılıyor. Zarın üst yüzünde tek sayı ve paranın üst yüzünde yazı gelme olasılığı nedir?

$P(A\cap B)=P(A).P(B)$

$=\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

29) Bir çift zar ile iki madeni para atıldığında zarın üst yüzüne gelen sayıların toplamının 8 ve paraların ikisininde tura gelme olasılığı nedir?

$\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$ $\frac{5}{36}$

$\{(Y,T),(T,Y),(Y,Y),(T,T)\}$ $\frac{1}{4}$

$P(A\cap B)=P(A).P(B)$

$=\frac{5}{36}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{144}$

30) Bir zar ve bir madeni para birlikte atılıyor. Zarın 4 veya 4 ten küçük, paranın tura gelme olasılığı nedir?

$\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

31) Bir torbada aynı büyüklükte 4 kırmızı, 5 beyaz, 7 yeşil kalem vardır. Rastgele alınan bir kalemin kırmızı veya beyaz olma olasılığı nedir?

$P(K\cup B)=P(K)+P(B)-\underbrace{P(K\cap B)}_{0}$

$=\frac{4}{16}+\frac{5}{16}=\frac{9}{16}$

32) Bir yarışmayı Kaan'ın kazanma olasılığı $\frac{3}{4}$, Zeynep'in kazanma olasılığı $\frac{2}{3}$ tür. Bu iki olay birbirinden bağımsız olduğuna göre bu yarışmayı Kaan'ın ya da Zeynep'in kazanma olasılığı nedir?

$P(K\cup Z)=P(K)+P(Z)-\underbrace{P(K\cap Z)}_{P(K).P(Z)}$

$=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}$

$=\frac{9}{12}+\frac{8}{12}-\frac{6}{12}=\frac{11}{12}$

33) Bir zar ile bir madeni para birlikte havaya atılıyor. Zarın üstünde 2 den büyük sayı veya paranın yazı gelme olasılığı nedir?

$P(\text{2den büyük} \cup \text{yazı})=P\left(\text{2 den büyük}\right)+P(\text{yazı})-P\left(\text{2den büyük ve yazı}\right)$

$=\frac{4}{6}+\frac{1}{2}-\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{4}{6}+\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$

34) Bir torbada 2 tane mavi, 5 tane yeşil mendil vardır. Bu torbadan geri atılmamak koşuluyla iki kez birer mendil çekiliyor. Bu iki çekilişin birincisinden mavi, ikincisinden de yeşil mendil çekme olasılığı nedir?

my $\longrightarrow \frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}=\frac{10}{42}=\frac{5}{21}$

35) A torbasında 3 beyaz, 4 kırmızı
B torbasında 5 beyaz, 2 kırmızı top vardır.
Aynı anda her iki torbadan birer top alınıyor ve öteki torbaya atılıyor.
Bu işlemin sonucunda torbalardaki kırmızı ve beyaz top sayılarının başlangıçtakiyle aynı olma olasılığı nedir?

BB + KK $\longrightarrow \frac{3}{7}\cdot\frac{5}{7}+\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{7}$

$\longrightarrow \frac{15}{49}+\frac{8}{49}=\frac{23}{49}$

36) Bir torbaya eşit sayıda kırmızı ve beyaz bilyeler konuluyor. Bu torbadan geri konulmamak üzere ard arda çekilen iki bilyenin ikisinde de kırmızı olma olasılığı $\frac{8}{33}$ tür. İlk durumda torbada kaç bilye vardır?

Kırmızı $\longrightarrow x$
Beyaz $\longrightarrow x$

KK $\longrightarrow \frac{x}{2x}\cdot\frac{x-1}{2x-1}=\frac{8}{33}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{2x-1}=\frac{8}{33}$

$\Rightarrow 33x-33=32x-16$

$x=17$

Kırmızı $\longrightarrow 17$
Beyaz $\longrightarrow 17$ } toplam 34 tanedir.

37) İçinde top bulunan iki torbadan birincisinde 4 beyaz 6 siyah ve ikincisinde 2 beyaz, 5 siyah top vardır. Birinci torbadan bir top çekilip rengine bakılmadan ikinci torbaya atılıyor.
Bundan sonra ikinci torbadan rastgele bir top çekildiğinde bunun beyaz olma olasılığı nedir?

BB + SB $\longrightarrow \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{8}+\frac{6}{10}\cdot\frac{2}{8}$

$\longrightarrow \frac{12}{80}+\frac{12}{80}=\frac{24}{80}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

38) İçerisinde 5 siyah, 4 beyaz ve 3 sarı bilye bulunan bir torbadan ard arda ve çekilen bilye geri iade edilmek koşulu ile yapılan üç çekilişte

a) Üçününde sarı olma olasılığı nedir?

SSS $\longrightarrow \frac{3}{12}\cdot\frac{3}{12}\cdot\frac{3}{12}=\frac{1}{64}$

b) Birincinin siyah, ikincinin beyaz ve üçüncünün sarı olma olasılığı nedir?

SBS $\longrightarrow \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{12}=\frac{5}{144}$

c) Birinin siyah, birinin beyaz, birinin sarı olma olasılığı nedir?

SBS $\longrightarrow \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{12}\cdot 3!$

⇓
Sıra belirtmediğinden 3 bilye kendi aralarında yer değiştirebilir.

$=\frac{5}{144}\cdot 6=\frac{5}{24}$